**Thermodynamique et mécanique des fluides – Chapitre 9**

# Transfert d'énergie par conduction thermique – TD

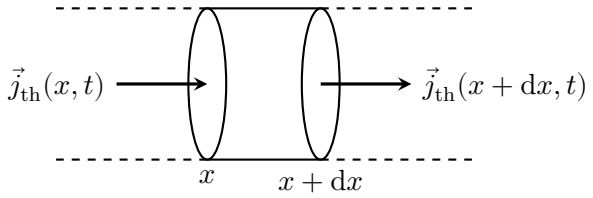
## Exercice 1 : Question de cours

On considère un solide homogène de masse volumique $\rho$, de capacité thermique massique $c$ et de conductivité thermique $\lambda$, dont on suppose que la température $T(x,t)$ ne dépend que de la coordonnée $x$ et du temps $t$.

**1.** Établir l'équation de la diffusion thermique en réalisant un bilan d'enthalpie à une tranche de ce solide comprise entre les abscisses $x$ et $x+\mathrm{d}x$ de surface $S$ entre les instants $t$ et $t+\mathrm{d}t$.

**Correction :**

**1.** On représente une tranche de ce solide :




En exprimant le vecteur densité de flux thermique de la forme $\vec{j}_{\text{th}}(x,t) = j_{\text{th}}(x,t)\,\vec{e}_x$, on peut exprimer pour cette tranche :

- le flux thermique entrant en $x$ : $\Phi_{\text{th,entrant}} = \iint_{\text{S}} (j_{\text{th}}(x,t)\,\vec{e}_x)\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_x) = j_{\text{th}}(x,t)\,S$ ;
- le flux thermique sortant en $x+\mathrm{d}x$ :
  $\Phi_{\text{th,sortant}} = \iint_{\text{S}} (j_{\text{th}}(x+\mathrm{d}x,t)\,\vec{e}_x)\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_x) = j_{\text{th}}(x+\mathrm{d}x,t)\,S \approx \left[j_{\text{th}}(x,t) + \dfrac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right] S$ ;

d'où on en déduit le transfert thermique reçu par cette tranche entre les instants $t$ et $t+\mathrm{d}t$ : $\delta Q = \Phi_{\text{th,entrant}}\,\mathrm{d}t - \Phi_{\text{th,sortant}}\,\mathrm{d}t = -\dfrac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,S\,\mathrm{d}t$, avec $\dfrac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} = -\lambda\,\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ d'après la loi de Fourier, soit : $\delta Q = \lambda\,\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\,S\,\mathrm{d}t$.

En considérant que cet échange d'énergie est isobare, l'application du premier principe de la thermodynamique donne : $\mathrm{d}H = \delta Q$, où on peut exprimer la variation d'enthalpie de cette tranche entre les instants $t$ et $t+\mathrm{d}t$ : $\mathrm{d}H = C\,[T(x,t+\mathrm{d}t) - T(x,t)] \approx c\,\rho\,S\,\mathrm{d}x\,\dfrac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t$, soit : $c\,\rho\,S\,\mathrm{d}x\,\dfrac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \lambda\,\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\,S\,\mathrm{d}t$, d'où en simplifiant : $c\,\rho\,\dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda\,\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

On pose $D = \dfrac{\lambda}{c\,\rho}$ le coefficient de diffusion thermique du matériau, et on aboutit finalement à l'équation de la diffusion thermique : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\,\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

## Exercice 2 : Production d'entropie dans une barre

On considère une barre cylindrique d'axe $x$, de longueur $L$ et de section $S_0$. Elle est constituée d'un matériau de conductivité thermique $\lambda$, dont la surface latérale est calorifugée. Elle est en contact en $x=0$ avec un thermostat à la température $T_1$, et en $x=L$ avec un thermostat à la température $T_2$ (où $T_2 < T_1$). On suppose que le régime stationnaire est établi.

**1.** Résoudre l'équation de la diffusion thermique pour déterminer le profil de température $T(x)$ dans la barre.

**2.** En déduire le flux thermique à travers la barre.

**3.** À l'aide du second principe de la thermodynamique, déterminer l'expression de l'entropie créée par unité de temps en fonction de $L$, $S_0$, $\lambda$, $T_1$ et $T_2$.

**4.** Conclure sur le caractère irréversible de la conduction thermique.

**Correction :**

**1.** En régime stationnaire, l'équation de la diffusion thermique donne : $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0$, d'où en intégrant : $T(x) = A\,x + B$, avec $A$ et $B$ des constantes que l'on détermine à l'aide des conditions aux limites.
Comme $T(x=0) = T_1 = B$, et $T(x=L) = T_2 = A\,L + T_1$, soit : $A = \dfrac{T_2 - T_1}{L}$, on en déduit le profil de température : $T(x) = \dfrac{T_2 - T_1}{L}\,x + T_1$.

**2.** Le flux thermique est : $\Phi_{\text{th}} = j_{\text{th}}\,S_0 = -\lambda\,\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,S_0$ d'après la loi de Fourier, d'où : $\Phi_{\text{th}} = -\lambda\,\dfrac{T_2 - T_1}{L}\,S_0$.

**3.** L'application du second principe de la thermodynamique à la barre pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$ donne : $\mathrm{d}S = \delta S_{\text{éch}} + \delta S_{\text{créée}}$, avec $\mathrm{d}S = 0$ en régime stationnaire, et $\delta S_{\text{éch}} = \dfrac{\delta Q_1}{T_1} + \dfrac{\delta Q_2}{T_2}$ l'entropie échangée avec les thermostats, où on peut exprimer :

- $\delta Q_1 = \Phi_{\text{th}}\,\mathrm{d}t$ le transfert thermique reçu en $x = 0$ ;
- $\delta Q_2 = -\Phi_{\text{th}}\,\mathrm{d}t$ le transfert thermique reçu en $x = L$, comme le flux est orienté de la barre vers ce thermostat.

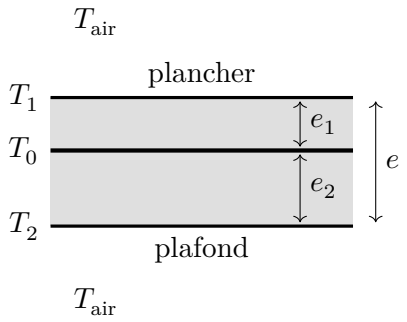
On obtient : $\delta S_{\text{éch}} = \dfrac{\Phi_{\text{th}}\,\mathrm{d}t}{T_1} - \dfrac{\Phi_{\text{th}}\,\mathrm{d}t}{T_2} = \Phi_{\text{th}}\,\mathrm{d}t\,\dfrac{T_2 - T_1}{T_1\,T_2}$, d'où : $\delta S_{\text{créée}} = -\delta S_{\text{éch}} = -\Phi_{\text{th}}\,\mathrm{d}t\,\dfrac{T_2 - T_1}{T_1\,T_2} = \dfrac{\lambda\,S_0}{L}\,\dfrac{(T_2 - T_1)^2}{T_1\,T_2}\,\mathrm{d}t$.

L'entropie créée par unité de temps est donc : $\dfrac{\delta S_{\text{créée}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\lambda\,S_0}{L}\,\dfrac{(T_2 - T_1)^2}{T_1\,T_2}$.

**4.** Comme $T_2 < T_1$, on obtient : $\dfrac{\delta S_{\text{créée}}}{\mathrm{d}t} > 0$, la conduction thermique est donc un processus irréversible.

## Exercice 3 : Chauffage au sol et au plafond

On considère une fine plaque constituée de résistances électriques qui permettent de maintenir sa température constante à $T_0 = 30°\text{C}$. Elle est noyée dans une dalle de béton d'épaisseur $e = 16\,\text{cm}$ et de surface $S$, dont la conductivité thermique est $\lambda = 1{,}2\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. En régime stationnaire, l'effet Joule produit par les résistances se partage entre un flux ascendant qui chauffe un plancher situé à une distance $e_1$ et un flux descendant qui chauffe un plafond situé à une distance $e_2$, comme schématisé ci-dessous. On modélise les échanges conducto-convectifs entre ces surfaces et l'air à la température $T_{\text{air}} = 18°\text{C}$ dans les deux pièces à l'aide de la loi de Newton avec un coefficient de transfert $h_1 = 6{,}0\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ pour le plancher et $h_2 = 4{,}0\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ pour le plafond.




**1.** Proposer un schéma électrique équivalent à la situation en définissant les résistances thermiques mises en jeu.

Pour un confort optimal, la température du plancher doit être maintenue à $T_1 = 26°\text{C}$.

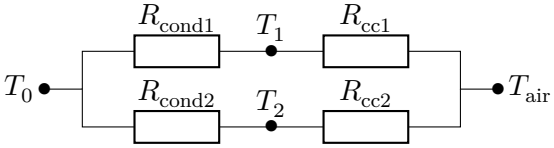
**2.** Déterminer l'épaisseur $e_1$ de béton entre la plaque et le plancher permettant de réaliser cette condition.

**3.** En déduire alors la température $T_2$ du plafond.

**4.** Déterminer la puissance surfacique générée par les résistances pour maintenir la plaque à la température $T_0$.

**Correction :**

**1.** On propose un schéma électrique équivalent à la situation :




en définissant :

- la résistance thermique par conduction entre la plaque et le plancher : $R_{\text{cond1}} = \dfrac{e_1}{\lambda\, S}$ ;
- la résistance thermique par conducto-convection entre le plancher et l'air : $R_{\text{cc1}} = \dfrac{1}{h_1\, S}$ ;
- la résistance thermique par conduction entre la plaque et le plafond : $R_{\text{cond2}} = \dfrac{e_2}{\lambda\, S}$ ;
- la résistance thermique par conducto-convection entre le plafond et l'air : $R_{\text{cc2}} = \dfrac{1}{h_2\, S}$.

**2.** L'application du pont diviseur de tension donne : $T_1 - T_{\text{air}} = \dfrac{R_{\text{cc1}}}{R_{\text{cc1}} + R_{\text{cond1}}}\,(T_0 - T_{\text{air}}) = \dfrac{\frac{1}{h_1 S}}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_1}{\lambda S}}\,(T_0 - T_{\text{air}})$,

d'où : $e_1 = \dfrac{\lambda}{h_1}\left(\dfrac{T_0 - T_{\text{air}}}{T_1 - T_{\text{air}}} - 1\right) = \dfrac{\lambda}{h_1}\,\dfrac{T_0 - T_1}{T_1 - T_{\text{air}}} = 0{,}10\,\text{m}.$

**3.** L'application du pont diviseur de tension donne : $T_2 - T_{\text{air}} = \dfrac{R_{\text{cc2}}}{R_{\text{cc2}} + R_{\text{cond2}}}\,(T_0 - T_{\text{air}}) = \dfrac{\frac{1}{h_2 S}}{\frac{1}{h_2 S} + \frac{e - e_1}{\lambda S}}\,(T_0 - T_{\text{air}})$,

d'où : $T_2 = T_{\text{air}} + \dfrac{\frac{1}{h_2}}{\frac{1}{h_2} + \frac{e - e_1}{\lambda}}\,(T_0 - T_{\text{air}}) = 28°\text{C}.$

**4.** Le flux thermique généré par les résistances est donné par la loi d'Ohm thermique : $\Phi_{\text{th}} = \dfrac{T_0 - T_{\text{air}}}{R_{\text{th,éq}}}$,
avec la résistance équivalente à l'ensemble des résistances pour prendre en compte les flux ascendant et descendant telle que : $\dfrac{1}{R_{\text{th,éq}}} = \dfrac{1}{R_{\text{cc1}} + R_{\text{cond1}}} + \dfrac{1}{R_{\text{cc2}} + R_{\text{cond2}}}$, d'où une puissance surfacique :
$P_{\text{s}} = \dfrac{\Phi_{\text{th}}}{S} = (T_0 - T_{\text{air}})\left(\dfrac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{e_1}{\lambda}} + \dfrac{1}{\frac{1}{h_2} + \frac{e - e_1}{\lambda}}\right) = 88\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}.$

## Exercice 4 : Ailette de refroidissement

Une ailette de refroidissement augmente la surface de contact entre un solide chaud et l'air ambiant, afin d'améliorer le refroidissement du solide en dissipant davantage de chaleur par conducto-convection.

On considère une ailette cylindrique semi-infinie d'axe $(Ox)$ et de rayon $R = 1{,}0\,\text{mm}$. Sa conductivité thermique est $\lambda = 400\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. L'ailette est en contact avec un matériau à la température $T_0 = 50°\text{C}$ par sa section d'abscisse $x = 0$, et avec l'air ambiant à la température $T_{\text{a}} = 20°\text{C}$ sur le reste de sa surface. On suppose que le régime stationnaire est établi, et que la température $T(x)$ sur une section d'abscisse $x$ de l'ailette est uniforme. Le flux thermique transmis à l'air ambiant vérifie la loi de Newton avec un coefficient de transfert conducto-convectif $h = 15\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.

**1.** En réalisant un bilan thermique sur une tranche de l'ailette comprise entre les abscisses $x$ et $x + \text{d}x$, montrer qu'en régime stationnaire la température vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\text{d}^2T}{\text{d}x^2} - \frac{1}{\delta^2}\,T(x) = -\frac{1}{\delta^2}\,T_{\text{a}}$$

avec $\delta$ une longueur à déterminer.

**2.** Déterminer l'expression du profil de température $T(x)$ en résolvant cette équation différentielle.

**3.** Calculer le flux thermique évacué par l'ailette vers l'air ambiant.

**4.** Calculer le flux thermique qui serait évacué par le matériau à la température $T_0$ à travers cette même surface s'il n'y avait pas d'ailette de refroidissement.

**5.** En déduire une expression de l'efficacité de l'ailette, puis calculer sa valeur numérique.

**Correction :**

**1.** On réalise un bilan thermique pour une tranche de l'ailette comprise entre les abscisses $x$ et $x+\mathrm{d}x$ :

- le flux thermique entrant en $x$ par conduction est : $\Phi_{\text{cond,entrant}} = j_{\text{th}}(x)\,\pi\,R^2$ ;
- le flux thermique sortant en $x+\mathrm{d}x$ par conduction est : $\Phi_{\text{cond,sortant}} = j_{\text{th}}(x+\mathrm{d}x)\,\pi\,R^2$ ;
- le flux thermique sortant par la surface latérale par conducto-convection est donné par la loi de Newton : $\Phi_{\text{cc,sortant}} = h\,[T(x)-T_{\text{a}}]\,2\,\pi\,R\,\mathrm{d}x$.

En régime stationnaire, la puissance totale reçue par la tranche de l'ailette est nulle, d'où : $\Phi_{\text{cond,entrant}} - \Phi_{\text{cond,sortant}} - \Phi_{\text{cc,sortant}} = 0$, soit : $j_{\text{th}}(x)\,\pi\,R^2 - j_{\text{th}}(x+\mathrm{d}x)\,\pi\,R^2 - h\,[T(x)-T_{\text{a}}]\,2\,\pi\,R\,\mathrm{d}x = 0$.

Comme $j_{\text{th}}(x) - j_{\text{th}}(x+\mathrm{d}x) = -\dfrac{\mathrm{d}j_{\text{th}}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$, et $j_{\text{th}}(x) = -\lambda\,\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ d'après la loi de Fourier, on obtient : $\lambda\,\dfrac{\mathrm{d}T^2}{\mathrm{d}x^2}\,R - 2\,h\,[T(x)-T_{\text{a}}] = 0$, d'où finalement : $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{1}{\delta^2}\,T(x) = -\dfrac{1}{\delta^2}\,T_{\text{a}}$, avec la longueur caractéristique : $\delta = \sqrt{\dfrac{\lambda\,R}{2\,h}} = 0{,}12\,\text{m}$.

**2.** La solution de l'équation homogène est de la forme : $T_{\text{h}} = A\,\mathrm{e}^{x/\delta} + B\,\mathrm{e}^{-x/\delta}$, avec $A$ et $B$ des constantes.
La solution particulière de l'équation est : $T_{\text{p}} = T_{\text{a}}$.
La solution générale est donc : $T(x) = T_{\text{h}} + T_{\text{p}} = A\,\mathrm{e}^{x/\delta} + B\,\mathrm{e}^{-x/\delta} + T_{\text{a}}$.
On détermine les constantes à l'aide des conditions aux limites :

- comme la température de l'ailette ne diverge pas lorsque $x \to \infty$, on a forcément : $A = 0$ ;
- au contact du matériau en $x = 0$, on a : $T(x=0) = T_0 = B + T_{\text{a}}$, d'où : $B = T_0 - T_{\text{a}}$ ;

et on obtient alors le profil de température : $T(x) = (T_0 - T_{\text{a}})\,\mathrm{e}^{-x/\delta} + T_{\text{a}}$.

**3.** On peut calculer le flux thermique évacué par l'ailette en intégrant la loi de Newton sur toute la longueur de l'ailette : $\Phi_{\text{évac}} = \displaystyle\int_{x=0}^{\infty} h\,[T(x)-T_{\text{a}}]\,2\,\pi\,R\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{\infty} h\,(T_0-T_{\text{a}})\,\mathrm{e}^{-x/\delta}\,2\,\pi\,R\,\mathrm{d}x = 2\,\pi\,R\,h\,(T_0-T_{\text{a}})\,\left[-\delta\,\mathrm{e}^{-x/\delta}\right]_0^{\infty}$, soit : $\Phi_{\text{évac}} = 2\,\pi\,R\,h\,\delta\,(T_0-T_{\text{a}}) = 0{,}33\,\text{W}$.
On obtient le même résultat en remarquant que ce flux thermique évacué correspond au flux transmis à l'ailette par le matériau en $x = 0$, soit : $\Phi_{\text{évac}} = \Phi_{\text{cond,entrant}}(x=0) = j_{\text{th}}(x=0)\,\pi\,R^2 = -\lambda\,\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x=0)\,\pi\,R^2 = \lambda\,\pi\,R^2\,\dfrac{T_0-T_{\text{a}}}{\delta} = 0{,}33\,\text{W}$.

**4.** En l'absence d'ailette, le flux thermique évacué par conducto-convection du matériau à l'air pour cette même surface serait : $\Phi'_{\text{évac}} = h\,[T(x=0)-T_{\text{a}}]\,\pi\,R^2 = h\,[T_0-T_{\text{a}}]\,\pi\,R^2 = 1{,}4.10^{-3}\,\text{W}$.

**5.** L'efficacité de l'ailette correspond au rapport de la puissance évacuée en présence de l'ailette sur celle évacuée en l'absence d'ailette, soit : $e = \dfrac{\Phi_{\text{évac}}}{\Phi'_{\text{évac}}} = 2{,}3.10^2$.

## Exercice 5 : Onde thermique dans le sol

Les variations de température à la surface du sol, qu'elles soient journalières (jour/nuit) ou annuelles (été/hiver), se propagent dans le sol sous la forme d'une onde thermique. On considère dans cette étude que le sol est un milieu homogène occupant le demi-espace $x > 0$, avec $x$ un axe vertical orienté vers le bas, dont le coefficient de diffusion thermique est $D = 1.10^{-6}\,\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$.

En supposant que la température à la surface $x = 0$ oscille de façon sinusoïdale autour d'une valeur moyenne $T_{\text{m}}$, on chercher une solution à ce régime sinusoïdal forcé sous la forme complexe :

$$\underline{T}(x,t) = T_{\text{m}} + \theta_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t - \underline{k}\,x)}$$

avec $\underline{k}$ le vecteur d'onde.

**1.** Rappeler l'équation de la diffusion thermique vérifiée par $\underline{T}(x,t)$.

**2.** En déduire que le vecteur d'onde s'exprime de la forme :

$$\underline{k} = \pm\frac{1-\mathrm{j}}{\delta}$$

avec $\delta$ une constante à exprimer. On rappelle pour cela la propriété mathématique : $-\mathrm{j} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi/2}$.

**3.** Justifier que l'une des deux solutions de $\underline{k}$ est impossible physiquement.

**4.** En déduire l'expression réelle de la température $T(x,t)$.

**5.** Calculer la valeur de $\delta$ pour le cas des oscillations de température journalières, puis en déduire la profondeur $x_0$ à laquelle l'amplitude des variations de température est 10 fois plus faible qu'en surface.

**6.** Faire de même pour le cas des oscillations de température annuelles, puis comparer les résultats obtenus.

**Correction :**

**1.** L'équation de la diffusion thermique vérifiée par $\underline{T}(x,t)$ est : $\dfrac{\partial \underline{T}}{\partial t} = D\,\dfrac{\partial^2 \underline{T}}{\partial x^2}$.

**2.** On exprime : $\dfrac{\partial \underline{T}}{\partial t} = \mathrm{j}\,\omega\,\theta_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t-\underline{k}\,x)}$ et $\dfrac{\partial \underline{T}}{\partial x} = -\mathrm{j}\,\underline{k}\,\theta_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t-\underline{k}\,x)}$, d'où : $\dfrac{\partial^2 \underline{T}}{\partial x^2} = \mathrm{j}^2\underline{k}^2\,\theta_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t-\underline{k}\,x)} = -\underline{k}^2\,\theta_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t-\underline{k}\,x)}$.

L'équation de la diffusion thermique donne : $\mathrm{j}\,\omega\,\theta_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t-\underline{k}\,x)} = -D\,\underline{k}^2\,\theta_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t-\underline{k}\,x)}$, d'où : $\underline{k}^2 = -\mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{D}$.

Comme $-\mathrm{j} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi/2}$, on en déduit : $\underline{k} = \pm\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi/4}\sqrt{\dfrac{\omega}{D}}$, avec $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi/4} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{j}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{j}\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, d'où : $\underline{k} = \pm\dfrac{1-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{\omega}{D}} = \pm\dfrac{1-\mathrm{j}}{\delta}$, en posant $\delta = \sqrt{\dfrac{2\,D}{\omega}}$.

**3.** En considérant la solution $\underline{k} = \dfrac{1-\mathrm{j}}{\delta}$, on obtient : $\underline{T}(x,t) = T_\mathrm{m} + \theta_0\,\mathrm{e}^{-x/\delta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t-x/\delta)}$. Cette solution présente une décroissance de l'amplitude des oscillations avec la profondeur, ce qui est possible physiquement.

En considérant la solution $\underline{k} = -\dfrac{1-\mathrm{j}}{\delta}$, on obtient : $\underline{T}(x,t) = T_\mathrm{m} + \theta_0\,\mathrm{e}^{x/\delta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t+x/\delta)}$. Cette solution présente une divergence de l'amplitude des oscillations lorsque $x \to \infty$, ce qui n'est pas possible physiquement.

**4.** En notation réelle, on obtient : $T(x,t) = T_\mathrm{m} + \theta_0\,\mathrm{e}^{-x/\delta}\cos\left(\omega\,t - \dfrac{x}{\delta}\right)$.

**5.** Les oscillations de température journalières ont une période $T = 24\,\mathrm{h}$, d'où : $\delta = \sqrt{\dfrac{2\,D}{2\,\pi/T}} = 0{,}2\,\mathrm{m}$.

La profondeur $x_0$ telle que l'amplitude des oscillations de température est 10 fois plus faible qu'en surface vérifie : $\theta_0\,\mathrm{e}^{-x_0/\delta} = \dfrac{\theta_0}{10}$, d'où : $x_0 = \delta\ln(10) = 0{,}4\,\mathrm{m}$.

**6.** Les oscillations de température annuelles ont une période $T' = 1\,\mathrm{an}$, d'où : $\delta' = 3\,\mathrm{m}$, et on en déduit la profondeur : $x_0' = 7\,\mathrm{m}$.

Comme $x_0' > x_0$, on en conclut que les variations de température annuelles pénètrent plus en profondeur dans le sol que les variations journalières.

## Exercice 6 : Cuisson d'un « œuf dur »

La durée minimum de cuisson d'un œuf sortant du réfrigérateur à la température $T_0 = 4°\mathrm{C}$ et plongé dans l'eau bouillante à la température $T_1 = 100°\mathrm{C}$ est de l'ordre de 10 min pour obtenir un « œuf dur », c'est-à-dire où le blanc et le jaune sont solides. Un œuf est assimilé à une sphère de rayon $R = 2\,\mathrm{cm}$, de masse volumique $\rho = 1{,}0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$ et de capacité thermique massique $c = 3{,}3\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$. On suppose que la température à l'intérieur de l'œuf est uniforme à chaque instant, et que les échanges conducto-convectifs à sa surface sont modélisés par la loi de Newton avec un coefficient de transfert $h$.

**1.** Établir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(t)$ de l'œuf.

**2.** Résoudre cette équation différentielle pour en déduire l'expression de $T(t)$.

Le blanc d'œuf coagule totalement à partir de 70°C, tandis que le jaune coagule totalement à partir de 85°C.

**3.** Estimer la valeur du coefficient de transfert $h$.

**Correction :**

**1.** Le flux thermique reçu par l'œuf est donné par la loi de Newton : $\Phi_{\text{th}} = 4\,\pi\,R^2\,h\,[T_1 - T(t)]$.
L'application du premier principe de la thermodynamique à l'œuf pendant un instant $\mathrm{d}t$ donne : $\mathrm{d}H = \delta Q$, avec la variation d'enthalpie $\mathrm{d}H = C\,\mathrm{d}T = \dfrac{4}{3}\,\pi\,R^3\,\rho\,c\,\mathrm{d}T$ et le transfert thermique $\delta Q = \Phi_{\text{th}}\,\mathrm{d}t$, soit : $\dfrac{4}{3}\,\pi\,R^3\,\rho\,c\,\mathrm{d}T = 4\,\pi\,R^2\,h\,[T_1 - T(t)]\,\mathrm{d}t$, d'où : $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \dfrac{3\,h}{R\,\rho\,c}\,T(t) = \dfrac{3\,h}{R\,\rho\,c}\,T_1$.

**2.** La solution est de la forme : $T(t) = A\exp\left(-\dfrac{3\,h}{R\,\rho\,c}\,t\right) + T_1$, avec $A$ une constante que l'on détermine à l'aide de la condition initiale : $T(0) = T_0 = A + T_1$, d'où : $A = T_0 - T_1$, soit finalement : $T(t) = (T_0 - T_1)\exp\left(-\dfrac{3\,h}{R\,\rho\,c}\,t\right) + T_1$.

**3.** On obtient un « œuf dur » à partir de la température $T_{\text{min}} = 85°\text{C}$ au bout d'un temps $t_{\text{min}} = 10\,\text{min}$, soit : $T_{\text{min}} = (T_0 - T_1)\exp\left(-\dfrac{3\,h}{R\,\rho\,c}\,t_{\text{min}}\right) + T_1$, d'où on en déduit : $h = -\dfrac{R\,\rho\,c}{3\,t_{\text{min}}}\ln\left(\dfrac{T_{\text{min}} - T_1}{T_0 - T_1}\right) = 7.10^1\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.